SEMESTRAL

UNI





academiacesarvallejo.edu.pe







ARITMÉTICA

Tema: NUMEROS RACIONALES I

Docente: Ramiro Díaz Vásquez

academiacesarvallejo.edu.pe

OBJETIVOS

1. Estudiar las clases de equivalencia y sus propiedades.
2. Definir el conjunto de los números racionales.
3. Estudiar las fracciones y sus propiedades.



INTRODUCCIÓN



INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS RACIONALES:

Definamos al conjunto $\mathbb{Z}^*$: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

Definamos ahora el conjunto producto:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a;b) \,/\, a \in \mathbb{Z} \ \wedge \ b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Siendo algunos de sus elementos:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(1,2),(18,6),(-3,5),(0,7),\ldots\}$$

Pudiendo escribirse también como:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \left\{\frac{1}{2},\frac{18}{6},\frac{-3}{5},\frac{0}{7},\ldots\right\}$$

Al escribirse en forma fraccionaria, observaremos que hay pares ordenados que a aún con diferentes términos, dan el mismo resultado. Estos pares ordenados se llamaran **equivalentes**.

Ejemplo:

$$(1;2) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad (2;4) = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$(3;6) = \frac{3}{6} = 0{,}5 \qquad (4;8) = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

Entonces: $\underbrace{(1;2) \approx (2;4) \approx (3;6) \approx (4;8) \ldots}_{\text{Equivalentes}}$

A partir de lo observado, denominaremos clase de equivalencia al conjunto formado por los pares ordenados equivalentes.

Ejemplo:

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \underbrace{\{\ldots;(1;2);(2;4);(3;6);(4;8);\ldots\}}_{\text{Clase de equivalencia}}$$

Representante canónico → $\left[\frac{1}{2}\right]$

Clase de equivalencia

Si graficamos cada par ordenado de la clase de equivalencia notamos que podemos unirlos con una recta.

La unión de todas las posibles clases de equivalencias forman el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

Con todo lo anterior, podemos definir entonces al conjunto de los números racionales como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right] / (a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

Por otro lado, el conjunto de los número racionales es denso, ya que se cumple que:

$$Si: \ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ \ y \ además: \ \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$$

$$Entonces, existe \ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}, tal \ que \ satisface:$$

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$$



Propiedades del conjunto $\mathbb{Q}$:

- Es un conjunto de conjuntos.
- Es un conjunto infinito.
- Es un conjunto denso.
- Los números enteros están incluidos en los racionales.
- Posee propiedad de clausura para las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Nota:
Dado que el conjunto de los números racionales es la unión de todas las clases de equivalencias (rectas), en los espacios que quedan entre ellas se ubicaran los números irracionales ($\mathbb{Q}^C$).

A partir de esto se puede decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^C$$

Aplicación 1: (Ex. UNI 2019 – I)

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. El producto de un número irracional por otro irracional es siempre irracional.
II. La suma de dos números irracionales siempre es un número irracional.
III. Entre dos números racionales diferentes siempre existe otro número racional.

Resolución:

Piden: Determinar la secuencia correcta de V o F.

I. $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$ (F)

II. $\left(\sqrt{2} + 4\right) + \left(4 - \sqrt{2}\right) = 8$ (F)

III. Entre dos números racionales existen infinitos números racionales por la propiedad de clausura. (V)

Respuesta: FFV



Aplicación 2: (Ex. UNI 2018 – II)

Sean las clases de equivalencia de números racionales:

$$\left[\frac{a}{b}\right];\left[\frac{m}{n}\right];\left[\frac{r}{s}\right]$$

Dadas las siguientes proposiciones:

$I.\quad Si\ \left[\frac{a}{b}\right]\cap\left[\frac{m}{n}\right]=\emptyset, entonces\ an=bm$

$II.\quad Si\ \left[\frac{a}{b}\right]\cap\left[\frac{m}{n}\right]\neq\emptyset, entonces\ \frac{n}{b}=\frac{m}{a}$

$III.\ Si\ \left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{m}{n}\right]=\left[\frac{r}{s}\right], entonces\ \frac{an+bm}{bn}\in\left[\frac{r}{s}\right]$

¿Cuáles son correctas?

Resolución:

Piden: Cuales son las proposiciones correctas.

I. Si se cumple que: $\left[\frac{a}{b}\right]\cap\left[\frac{m}{n}\right]=\emptyset$ entonces, se tiene que las clases de equivalencia representan valores diferentes.

Entonces:

$$\frac{a}{b}\neq\frac{m}{n}\longrightarrow an\neq bm$$

Por lo que la proposición es falsa. (F)

II. Si se cumple que: $\left[\frac{a}{b}\right]\cap\left[\frac{m}{n}\right]\neq\emptyset$ entonces, se tiene que las clases de equivalencia son iguales.

Entonces:

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\longrightarrow an=bm\longrightarrow\frac{n}{b}=\frac{m}{a}$$

Pero no cumple para $a=0$, por lo que la proposición es falsa. (F)

III. $\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{m}{n}\right]=\left[\frac{r}{s}\right]\longrightarrow\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=\frac{an+bm}{bn}$

Por lo que la proposición es verdadera. (V)

Respuesta: Solo III

FRACCIONES:

Son expresiones que cumplen con:

$$f = \left\{\frac{a}{b} \; a \in \mathbb{Z}^+ \wedge b \in \mathbb{Z}^+ \wedge a \neq b\right\}$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{5}\,;\,\frac{7}{75}\,;\,\frac{11}{3}\,;\,\frac{17}{35}\,;\,\frac{-7}{12}\,;\,\frac{-9}{-5}\,;\,\frac{18}{3}\,;\,\frac{51}{-52}\,;\,\frac{91}{13}$$

Fracciones: $\frac{3}{5}\,;\,\frac{7}{75}\,;\,\frac{11}{3}\,;\,\frac{17}{35}$

No son fracciones: $\frac{-7}{12}\,;\,\frac{-9}{-5}\,;\,\frac{18}{3}\,;\,\frac{51}{-52}\,;\,\frac{91}{13}$

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES:

a) De acuerdo al denominador:

Decimales	Ordinarias
$f = \frac{N}{D}\;;\; D = 10^n$	$f = \frac{N}{D}\;;\; D \neq 10^n$

Ejemplos:

Fracciones decimales: $\frac{3}{10}\,;\,\frac{15}{10^2}\,;\,\frac{1}{10^5}\,;\,\frac{7}{10^3}$

Fracciones ordinarias: $\frac{8}{17}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{3}{21}\,;\,\frac{4}{65}$

b) De acuerdo a la comparación con la unidad:

Propias	Impropias
$f = \frac{N}{D} < 1\;;\; N < D$	$f = \frac{N}{D} > 1\;;\; N > D$

Ejemplos:

Fracciones propias: $\frac{3}{10}\,;\,\frac{15}{63}\,;\,\frac{1}{5}\,;\,\frac{11}{37}$

Fracciones impropias: $\frac{7}{5}\,;\,\frac{13}{9}\,;\,\frac{19}{4}\,;\,\frac{65}{12}$



c) Por la cantidad de divisores comunes de sus términos:

Reductibles	Irreductibles
$f=\frac{N}{D}$; N y D no son PESI	$f=\frac{N}{D}$; N y D son PESI

Ejemplos:

Fracciones reductibles: $\frac{14}{21}$; $\frac{52}{91}$; $\frac{11}{55}$; $\frac{135}{60}$

Fracciones irreductibles: $\frac{8}{17}$; $\frac{25}{11}$; $\frac{16}{21}$; $\frac{4}{65}$

d) Por grupo de fracciones:

Homogéneas	Heterogéneas
Cuando todos los denominadores son iguales.	Cuando algunos denominadores son diferentes.

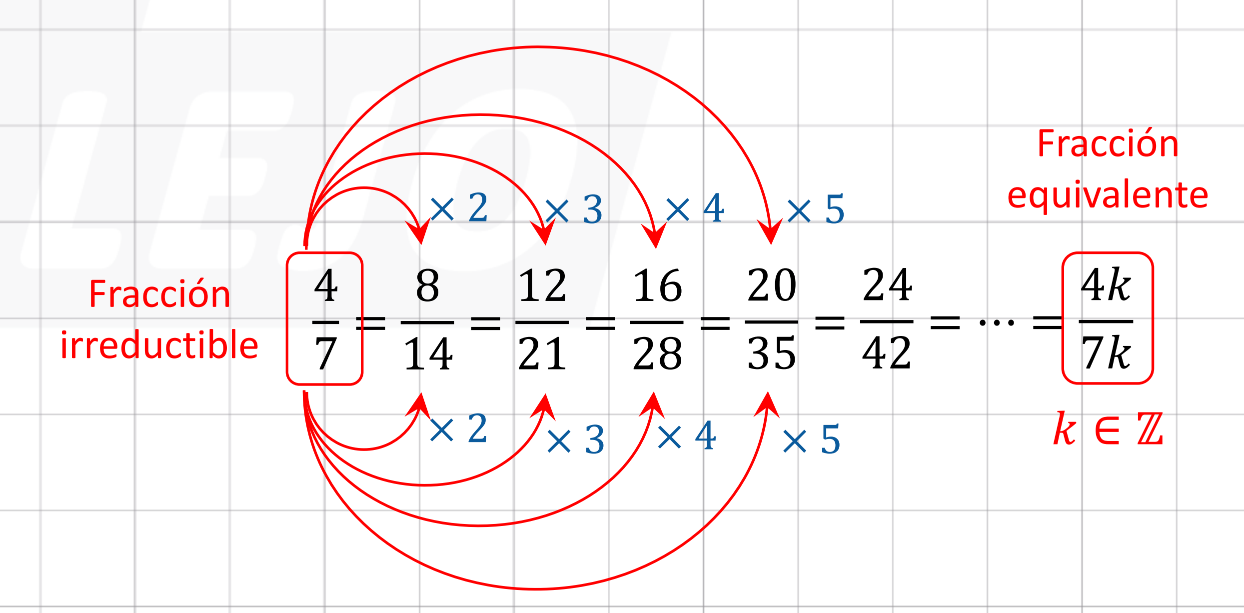
Ejemplos:

Fracciones homogéneas: $\frac{11}{4}$; $\frac{21}{4}$; $\frac{37}{4}$; $\frac{53}{4}$

Fracciones heterogéneas: $\frac{8}{17}$; $\frac{25}{17}$; $\frac{16}{21}$; $\frac{4}{65}$

Nota:

Las fracciones equivalentes se obtienen a partir de las fracciones irreductibles:





Aplicación 3:

¿Cuántas fracciones equivalentes a 513/684 existen, de modo que la suma de sus términos sea múltiplo de 91 y dicha suma esté comprendida entre 100 y 500?

Resolución:

Piden: La cantidad de fracciones equivalentes.

Buscando la fracción irreductible: $\frac{513}{684} = \frac{3}{4}$

Entonces las fracciones equivalentes son: $\frac{3k}{4k}$

Además: $3k + 4k = \overset{\circ}{91}$ $\qquad 7k = \overset{\circ}{91} = 91n$

$$100 < 7k < 500$$
$$100 < 91n < 500$$
$$1,\ldots < n < 5,\ldots \longrightarrow n = \{2; 3; 4; 5\}$$

Por lo tanto, hay 4 fracciones.

Respuesta: 4 fracciones

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES:

Sean $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$ dos fracciones irreductibles, tales que:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = N \quad \therefore N \in \mathbb{Z} \longrightarrow b = d$$

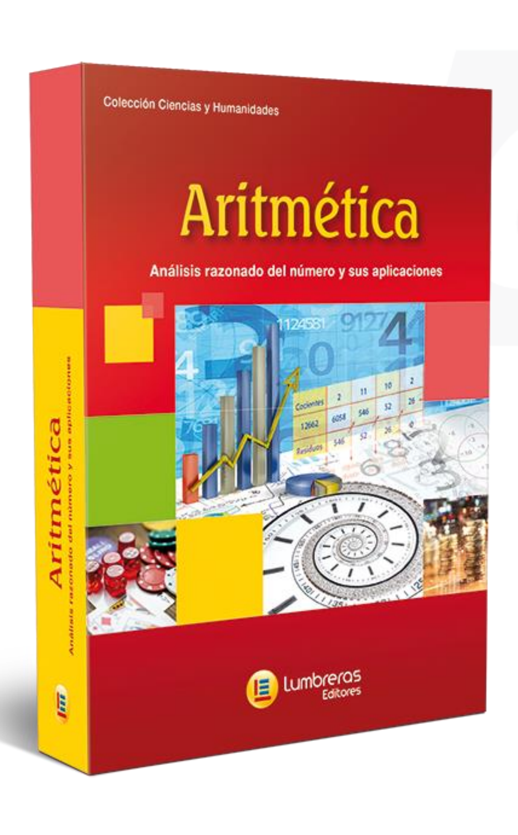
Sean $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$ tres fracciones irreductibles.

Entonces:

$$MCD\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f}\right) = \frac{MCD(a; c; e)}{MCM(b; d; f)}$$

$$MCM\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f}\right) = \frac{MCM(a; c; e)}{MCD(b; d; f)}$$

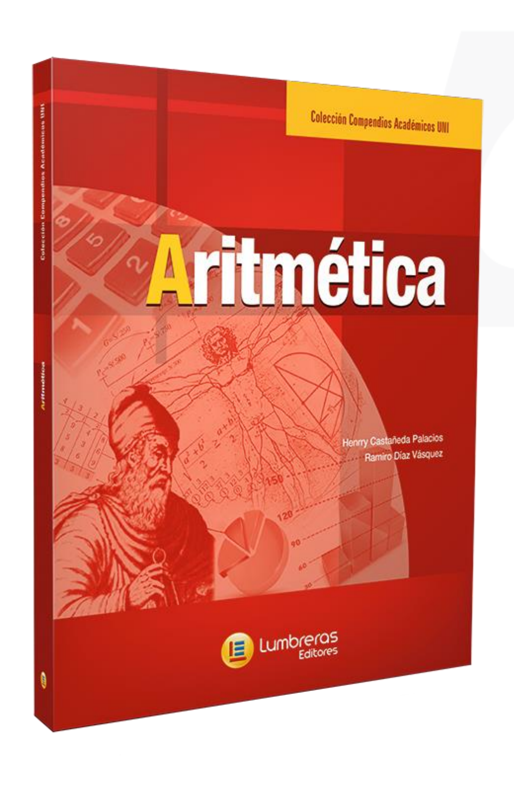
COLECCIÓN CIENCIAS Y HUMANIDADES



- Indispensable para profundizar el conocimiento de la aritmética.
- Su estructura presenta objetivos, introducción en cada tema, teoría amplia y desarrollada con ejemplos y aplicaciones, preguntas resueltas y preguntas propuestas tipo examen de admisión.



COLECCIÓN COMPENDIOS ACADÉMICOS UNI



- Estos libros le ayudarán a consolidar sus conocimientos con los temas más frecuentes en exámenes de admisión.
- Su estructura presenta teoría resumida y didáctica, problemas propuestos y sección de claves.



ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS: 

academiacesarvallejo.edu.pe